y

Granice Banacha

Tomasz Kania, 12.12.08

1. **Pojęcia wstępne. Twierdzenie Hahna-Banacha.**

Definicja 1. Jeśli X jest przestrzenią liniową nad ciałem K liczb rzeczywistych lub zespolonych, to funkcję $p\colon X \to [0, \infty)$, spełniającą dla wszystkich $x, y \in X$ warunki

(1) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ dla $\alpha \in K$
(2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

nazywamy **półnormą** (w przestrzeni X). Jeśli ponadto spełniony jest warunek

(0) $p(x) = 0 \iff x = 0$

to funkcję p nazywamy **normą** (w przestrzeni X), a parę (X, p) przestrzenią unormowaną. Normy oznaczamy najczęściej symbolem $\|\cdot\|$.

Jeśli $\|\cdot\|$ jest normą w przestrzeni X, to funkcja $d(x, y) = \|x - y\|$ jest metryką w zbiorze X. Możemy zatem mówić o zbieżności ciągów punktów przestrzeni X, a także ciągłości przekształceń określonych na X.

Przykład 1. Wszystkie ciągi o wyrazach liczbowych tworzą przestrzeń liniową z działaniami określonymi standardowo "po współrzędnych". Ponieważ kombinacja liniowa ciągów ograniczonych (zbieżnych) jest ciągiem ograniczonym (zbieżnym), więc rodzina ciągów ograniczonych (zbieżnych) jest podprzestrzenią liniową przestrzeni wszystkich ciągów. Przestrzenie takich ciągów oznaczamy, odpowiednio, symbolami ℓ^∞ i c - ponadto $c \subset \ell^\infty$. Okazuje się, że funkcja dana wzorem $\|x\| = \sup\{|x_n|\colon n \in \mathbb{N}\}$ dla $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ jest normą, a zatem przestrzenie ℓ^∞ i c (z normą dziedziczoną z przestrzeni ℓ^∞) są przykładami przestrzeni unormowanych.

Lemat 1 (Własności półnormy)**.** Jeśli p jest półnormą w przestrzeni X, to dla $x, y \in X$:

(3) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$
(4) $p(x) \geq 0$
(5) $p(0) = 0$
(6) Zbiór $\{x \in X \colon p(x) = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni X.

Dowód:

ad (3) Wystarczy zauważyć, że $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$, podobnie $p(y) \leq p(y - x) + p(x)$. Ponieważ $p(x - y) = p(y - x)$, a zatem $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.
ad (4) $p(x) = p(x - 0) \geq |p(x) - p(0)| \geq 0$.
ad (5) Oczywiste.
ad (6) Niech $\alpha \in K$ oraz $p(x) = p(y) = 0$. Wówczas $p(\alpha x + y) \leq |\alpha| p(x) + p(y) = 0$.

Jeśli X jest przestrzenią unormowaną nad K, to symbolem X^* oznaczamy rodzinę wszystkich liniowych i ciągłych funkcjonałów $x^*\colon X \to K$ i nazywamy **przestrzenią sprzężoną (dualną)** do X. Przestrzeń sprzężona jest przestrzenią liniową z działaniami określonymi w sposób standardowy. Jeśli

$X \neq \{0\}$, to X^* jest przestrzenią unormowaną, z normą daną wzorem

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*x| \colon x \in X, \|x\| = 1\}.$$

Twierdzenie 1 (Hahna-Banacha)**.** Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz $p\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem, spełniającym warunki:

$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ dla $x, y \in X$,
$p(\alpha x) = \alpha p(x)$ dla $\alpha \geq 0$ oraz $x \in X$.

Jeśli X_0 jest podprzestrzenią liniową przestrzeni X oraz $f_0\colon X_0 \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym spełniającym warunek

$f_0(x) \leq p(x)$ dla $x \in X_0$,

to istnieje funkcjonał liniowy $f\colon X \to \mathbb{R}$ taki, że $f(x) \leq p(x)$ dla $x \in X$ oraz $f|_{X_0} = f_0$.

Dowód. Jeśli $x_1 \in X \setminus X_0$, to istnieje taki funkcjonał $f_1\colon \mathrm{lin}(X_0 \cup \{x_1\}) \to \mathbb{R}$, że $f_1|_{X_0} = f_0$ oraz $f_1(x) \leq p(x)$ dla $x \in \mathrm{lin}(X_0 \cup \{x_1\})$.

(1) Jeżeli $x, y \in X_0$, to $f_0(x)+f_0(y) = f_0(x+y) \leq p(x+y) = p(x-x_1+x_1+y) \leq p(x-x_1)+p(y+x_1)$, skąd $f_0(x) - p(x-x_1) \leq p(y+x_1) - f_0(y)$
(2) $\omega := \sup\{f_0(x) - p(x-x_1)\colon\ x \in X_0\}$
(3) $\omega \in \mathbb{R}$
(4) $f_0(x) - p(x-x_1) \leq \omega \leq p(y+x_1) - f_0(y)$ dla $x, y \in X_0$
(5) $f_1\colon \mathrm{lin}(X_0 \cup \{x_1\}) \to \mathbb{R}$ niech dany będzie wzorem $f_1(x+\alpha x_1) = f_0(x)+\alpha\omega$ dla $x \in X_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
(6) Jeśli $x, y \in X_0$ oraz $\alpha \in (0, \infty)$, to $\alpha(f_0(\frac{x}{\alpha}) - p(\frac{x}{\alpha} - x_1)) \leq \alpha\omega \leq \alpha(p(\frac{y}{\alpha} + x_1) - f_0(\frac{y}{\alpha}))$. Tzn.
$f_0(x) - p(x - \alpha x_1) \leq \alpha\omega$
$f_1(x + (-\alpha)x_1) = f_0(x) - \alpha\omega \leq p(x - \alpha x_1) = p(x + (-\alpha)x_1)$. Podobnie
$f_1(y + \alpha x_1) = f_0(y) + \alpha\omega \leq p(y + \alpha x_1)$
(7) $f_1(x) \leq p(x)$ dla $x \in \mathrm{lin}(X_0 \cup \{x_1\})$

Istnienie maksymalnego rozszerzenia funkcjonału f_0.

(1) $\mathcal{G} = \{(Y, g)\colon\ Y$ - podprzestrzeń liniowa prz. X, $g\colon Y \to \mathbb{R}$ - liniowe, $g(y) \leq p(y), y \in Y\}$
(2) Wzór $(Y_1, g_1) \leq (Y_2, g_2) \iff Y_1 \subseteq Y_2$, $g_2|_{Y_1} = g_1$ określa częściowy porządek w zbiorze $\mathcal{G}$.
(3) W przestrzeni $(\mathcal{G}, \leq)$ każdy łańcuch ma ograniczenie górne (swoją sumę), a więc na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje element maksymalny (Y_*, g_*) taki, że $(X_0, f_0) \leq (X_*, g_*)$.
(4) $Y_* = X$, $g_*|_{X_0} = f_0$.

Wniosek 1. Jeśli X jest rzeczywistą przestrzenią liniową oraz $p\colon X \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem takim jak w poprzednim twierdzeniu, to dla każdego $x_0 \in X$ istnieje taki funkcjonał liniowy $f\colon X \to \mathbb{R}$, że $f(x_0) = p(x_0)$ oraz $f(x) \leq p(x)$ dla $x \in X$.

Dowód. Jeśli $x \in X$, to $0 = p(0) = p(x-x) \leq p(x) + p(-x)$, tzn. $-p(-x) \leq p(x)$. Niech $x_0 \in X$ oraz $X_0 = \mathrm{lin}\{x_0\}$. Wzór $f_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0)$ określa funkcjonał liniowy $f_0\colon X_0 \to \mathbb{R}$ oraz $f(x_0) = p(x_0)$. Jeśli $\alpha \geq 0$, to $f(\alpha x_0) = \alpha p(x_0) = p(\alpha x_0)$ oraz $f(-\alpha x_0) = -f(\alpha x_0) = -p(\alpha x_0) = -p(-(-\alpha)x_0) \leq p(-\alpha x_0)$. Ostatecznie $f_0(x) \leq p(x)$ dla $x \in X_0$.

Wniosek 2. Niech X będzie zespoloną przestrzenią liniową oraz $p\colon X \to \mathbb{R}$ będzie półnormą w tej przestrzeni. Jeżeli $X_0 \subseteq X$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni X oraz $f_0\colon X_0 \to \mathbb{C}$ jest takim funkcjonałem liniowym, że $|f_0(x)| \leq p(x)$ dla $x \in X_0$, to istnieje taki funkcjonał liniowy $f\colon X \to \mathbb{C}$, że $f|_{X_0} = f_0$ oraz $|f(x)| \leq p(x)$ dla $x \in X$.

Dowód:

(1) Jeżeli $x_0 \in X_0$, to $f_0(ix) = if_0(x) = i(\Re f_0(x) + i\Im f_0(x)) = -\Im f_0(x) + i\Re f_0(x)$
(2) $\Im f_0(x) = -\Re f_0(ix)$ dla $x \in X$
(3) $g_0(x) = \Re f_0(x)$ dla $x \in X$
(4) $f_0(x) = g_0(x) - ig_0(ix)$ dla $x \in X$
(5) g_0 jest funkcjonałem $\mathbb{R}$-liniowym
(6) $g_0(x) = \Re f_0(x) \leq |\Re f_0(x)| \leq |f_0(x)| \leq p(x)$ dla $x \in X_0$
(7) $g\colon X \to \mathbb{R}$ funkcjonał $\mathbb{R}$-liniowy taki, że $g|_{X_0} = g_0$ oraz $g(x) \leq p(x)$ dla $x \in X$
(8) $f(x) := g(x) - ig(ix)$ dla $x \in X$
(9) Funkcjonał f jest $\mathbb{R}$-liniowy oraz $f(ix) = g(ix) - g(-x) = g(ix) + ig(x) = i(g(x) - ig(ix)) = if(x)$ dla $x \in X$
(10) f jest liniowy
(11) $f|_{X_0} = f_0$
(12) Jeżeli $x \in X$, to biorąc takie $\alpha \in \mathbb{C}$, że $|f(x)| = \alpha f(x)$ oraz $|\alpha| = 1$ mamy $|f(x)| = \alpha f(x) = f(\alpha x) = \Re f(\alpha x) = g(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x)$

Wniosek 3. Jeśli X jest przestrzenią liniową nad ciałem K liczb rzeczywistych bądź zespolonych oraz $p\colon X \to \mathbb{R}$ jest półnormą, to dla każdego $x_0 \in X$ istnieje taki funkcjonał liniowy $f\colon X \to K$, że $f(x_0) = p(x_0)$ oraz $|f(x)| \leq p(x)$ dla $x \in X$.

Wniosek 4 (Klasyczna wersja twierdzenia Hahna-Banacha)**.** Jeśli X jest przestrzenią unormowaną oraz $X_0 \subseteq X$ jej podprzestrzenią liniową, to dla każdego $x_0^* \in X_0^*$ istnieje $x^* \in X^*$ taki, że $x^*|_{X_0} = x_0^*$ oraz $\|x_0^*\| = \|x^*\|$.

Dowód:

(1) $x_0^* \in X_0^*$
(2) Odwzorowanie dane wzorem $p(x) := \|x_0^*\|\|x\|$ dla $x \in X$ jest półnormą w przestrzeni X.
(3) $|x_0^* x| \leq p(x)$ dla $x \in X_0$
(4) $x^*\colon X \to K$ - funkcjonał liniowy taki, że $x^*|_{X_0} = x_0^*$ oraz $|x^* x| \leq p(x)$ dla $x \in X$.
(5) $x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq \|x_0^*\|$.

Wniosek 5 (Twierdzenie o wydobywaniu normy)**.** Jeśli X jest przestrzenią unormowaną, to dla każdego $x_0 \in X \setminus \{0\}$ istnieje $x^* \in X^*$ taki, że $\|x\| = x^* x$ oraz $\|x\| = 1$.

Dowód. Wystarczy rozważyć (pół)normę $p(x) = \|x\|$ dla $x \in X$.

2. **Granice Banacha**

Jeśli $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ jest ciągiem liczbowym, to oznaczmy $Sx = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$.

Twierdzenie 2. Istnieje funkcjonał liniowy $f\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ o własnościach

(1) Jeśli $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ oraz $x_n \geq 0$, to $f(x) \geq 0$,
(2) Jeśli $x \in \ell^\infty$, to $f(x) = f(Sx)$,

(3) $f(1,1,1,\ldots)=1$.

Dowód. Rozważmy podprzestrzeń

$$X_0=\{x\in\ell^\infty\colon\ \text{ciąg}\ \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{ma skończoną granicę}\}$$

oraz funkcjonały: $f_0\colon X_0\to\mathbb{R}$, $p\colon \ell^\infty\to\mathbb{R}$ dane wzorami, odpowiednio, $f_0(x_1,x_2,\ldots)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$ i $p(x_1,x_2,\ldots)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$. Na mocy twierdzenia Hahna-Banacha, istnieje funkcjonał liniowy $f\colon\ell^\infty\to\mathbb{R}$ taki, że $f(x)\le p(x)$ dla $x\in\ell^\infty$ oraz $f|_{X_0}=f_0$.

Niech $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$ oraz $x_n\ge 0$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wówczas

$$-f(x)=f(-x)\le p(-x)=-\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$$

tzn.

$$f(x)\ge\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\ge 0.$$

Ustalmy $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$. Wówczas

$$p(x-Sx)=p(x_1-x_2,x_2-x_3,\ldots)=\limsup_{n\to\infty}\frac{x_1-x_2+x_2-x_3+\ldots+x_n-x_{n+1}}{n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{x_1-x_{n+1}}{n}=0.$$

Ponieważ $f(x-Sx)\le p(x-Sx)=0$, a zatem $f(x)\le f(Sx)$. Z drugiej strony, $-f(x)=f(-x)\le f(-Sx)=-f(Sx)$, skąd ostatecznie $f(x)=f(Sx)$.

Ciąg $(1,1,1,1,\ldots)\in X_0$ oraz $f_0(1,1,1,\ldots)=1$.

Uwaga 1. Funkcjonał f taki, jak w powyższym twierdzeniu nie musi być wyznaczony jednoznacznie.

Definicja 2. Funkcjonał f taki, jak wyżej nazywamy **granicą Banacha**.

Niech LIM będzie ustaloną granicą Banacha.

Twierdzenie 3 (Własności)**.** Niech $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$.

(1) Jeśli $x_n\le y_n$ dla $n\in\mathbb{N}$, to $\mathrm{LIM}(x)\le\mathrm{LIM}(y)$

(2) $\liminf_{n\to\infty}x_n\le\mathrm{LIM}(x)\le\limsup_{n\to\infty}x_n$ (co oznacza, że $\mathrm{LIM}(x)=\lim_{n\to\infty}x_n$ dla $x\in c$)

Dowód. ad (1) $y_n-x_n\ge 0$ dla $n\in\mathbb{N}$, skąd $\mathrm{LIM}((y_n-x_n))\ge 0$. Z liniowości $\mathrm{LIM}(y)-\mathrm{LIM}(x)\ge 0$.
ad (2) Zobacz dowód twierdzenia 2.

Przykład 2. Jeśli $x=(1,0,1,0,\ldots)$, to $\mathrm{LIM}(x)=\frac{1}{2}$

Dowód. $x+Sx=(1,1,1,\ldots)$, skąd $\mathrm{LIM}(x+Sx)=1$, ale $\mathrm{LIM}(x+Sx)=\mathrm{LIM}(x)+\mathrm{LIM}(Sx)=2\mathrm{LIM}(x)$, czyli $\mathrm{LIM}(x)=\frac{1}{2}$.

Uwaga 2. Granica Banacha nie jest funkcjonałem multyplikatywnym, tzn. istnieją $x,y\in\ell^\infty$ takie, że $\mathrm{LIM}(xy)\ne\mathrm{LIM}(x)\cdot\mathrm{LIM}(y)$.

Dowód. Załóżmy, że LIM jest multiplikatywny oraz weźmy $x=(1,0,1,0,\ldots)$. Wówczas $0=\mathrm{LIM}(0)=\mathrm{LIM}(x\cdot Sx)=\mathrm{LIM}(x)\cdot\mathrm{LIM}(Sx)=(\mathrm{LIM}(x))^2=\frac{1}{4}$

Bibliografia

[1] Rudin W.: *Analiza funkcjonalna.* PWN, Warszawa 2000